



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

## **Channel Estimation Equalization - Άσκηση 3**

Οικονομίδης Κωνσταντίνος (ΑΜ:2021030075)  
Διδάσκων: Αθανασιος Π. Λιάβας

Πολυτεχνείο Κρήτης - Σχολή ΗΜΜΥ  
**Ασύρματες Επικοινωνίες**

Χειμερινό εξάμηνο 2025-2026

A. (20) Αρχικά, θα δημιουργήσουμε τα δεδομένα.

A.1 Να δημιουργήσετε τυχαίο μιγαδικό κανάλι με  $h = \{h_k\}_{k=0}^K$ , με  $h \sim \text{CN}(0, I_{K+1})$  (ενδεικτικά  $K=4,6$ ), και να το κανονικοποιήσετε ώστε να έχει ενέργεια ίση με 1

Από τον κώδικα, πήραμε το εξής αποτέλεσμα:

```
Ενέργεια πριν την κανονικοποίηση: 16.0449
Ενέργεια μετά την κανονικοποίηση: 1
```

Παράγεται ένα τυχαίο μιγαδικό κανάλι διακριτού χρόνου, όπου κάθε συνιστώσα ακολουθεί μιγαδική κανονική κατανομή  $h_k \sim \text{CN}(0, 1)$ . Έπειτα το διάνυσμα του καναλιού κανονικοποιείται έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια να γίνει ίση με 1. Η αρχική ενέργεια της συγκεκριμένης πραγμάτωσης ήταν περίπου 16.04, ενώ μετά την κανονικοποίηση είναι ίση με 1.

A.2 Να δημιουργήσετε πακέτο πληροφορίας  $\{s_n\}_{n=1}^N$  με ισοπίθανα  $s_n \in \{\pm 1 \pm j\}$  (ενδεικτικά,  $N = 100,200$ )

Με βάση τον κώδικα που υλοποιήθηκε, λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα:

```
N = 200
1+1i -> πλήθος εμφανίσεων: 43
1-1i -> πλήθος εμφανίσεων: 56
-1+1i -> πλήθος εμφανίσεων: 48
-1-1i -> πλήθος εμφανίσεων: 53
```

Δημιουργείται πακέτο  $N$  μιγαδικών πληροφορίας  $\{s_n\}_{n=1}^N$ , όπου κάθε σύμβολο επιλέγεται ισοπίθανα από το  $n$  αστερισμό  $\pm 1 \pm j$ . Η θεωρητική πιθανότητα κάθε σημείου είναι  $\frac{1}{4}$ , όπως φαίνεται και από την κατανομή των σημείων (43, 56, 48, 53).

A.3 Να θεωρήσετε τα σύμβολα στις θέσεις  $n = n_1, \dots, n_2$  ως σύμβολα εκπαίδευσης (ενδεικτικά,  $n_1 = 40, n_2 = 60$ ).

Από την εκτέλεση των εντολών του κώδικα προκύπτει το εξής:

```
n1 = 40, n2 = 60
Πλήθος training συμβόλων: Ntr = 21
```

Σε αυτό το ερώτημα, ορίζουμε κάποια από τα σύμβολα  $\{s_n\}_{n=1}^N$  ως σύμβολα εκπαίδευσης για να εκτιμήσουμε το κανάλι. Θέτουμε ως  $n_1 = 40$  και  $n_2 = 60$ , και από ότι φαίνεται ο συνολικός αριθμός training symbols είναι  $N_{tr} = 21$ .

A.4 Να υπολογίσετε την αθόρυβη έξοδο του καναλιού,  $\{y_n\}_{n=1}^{N+K}$ .

Μετά την εκτέλεση του κώδικα, προκύπτει το αποτέλεσμα:

Μήκος εξόδου  $Ny = 204$

Σε αυτό το ερώτημα, υπολογίζεται η αθόρυβη έξοδος του διακριτού καναλιού, εφαρμόζοντας συνέλιξη. Η έξοδος  $y_n = \sum_{k=0}^K h_k s_{n-k}$  παράγεται για  $n = 1, \dots, N + K$ , οπότε έχουμε μια ακολουθία μήκους  $N+K=204$ .

A.5 (10) Να αποδείξετε ότι η ισχύς της εξόδου ισούται με  $P_y = 2 \sum_{k=0}^K |h_k|^2 = 2$ .

Απόδειξη:

Η έξοδος χωρίς θόρυβο ορίζεται ως:

$$y_n = \sum_{k=0}^K h_k s_{n-k}$$

και η μέση ισχύς εξόδου ορίζεται ως:

$$P_y = E\{|y_n|^2\}$$

Επομένως η στιγμιαία ισχύς εξόδου είναι:

$$|y_n|^2 = y_n y_n^* = \left( \sum_{k=0}^K h_k s_{n-k} \right) \left( \sum_{l=0}^K h_l s_{n-l} \right)^* = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K h_k h_l^* s_{n-k} s_{n-l}^*$$

Και η αναμενόμενη τιμή είναι:

$$\{|y_n|^2\} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K h_k h_l^* E\{s_{n-k} s_{n-l}^*\}$$

Όμως τα σύμβολα  $s_n$  είναι ανεξάρτητα και με μη μηδενική μέση τιμή, ισχύει:

$$E\{s_{n-k} s_{n-l}^*\} = 0, \text{ για } k \neq l$$

$$E\{|s_n|^2\} = E\{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2\} = 1 + 1 = 2$$

Άρα:

$$E\{s_{n-k} s_{n-l}^*\} = \begin{cases} 2, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Έπειτα:

$$P_y = E\{|y_n|^2\} = \sum_{k=0}^K h_k h_k^* 2 = 2 \sum_{k=0}^K |h_k|^2$$

Ωστόσο, το κανάλι είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή:  $\sum_{k=0}^K |h_k|^2 = 1$

Επομένως:

$$P_y = 2 \sum_{k=0}^K |h_k|^2 = 2 \cdot 1 = 2$$

- A.6 (10) Για δεδομένο SNR (ενδεικτικά, SNR = 30 dB), να προσθέσετε λευκό κυκλικό Gaussian θόρυβο  $w_n$  στην έξοδο  $y_n$  και να λάβετε την ενθόρυβη έξοδο  $y_n^N$ .

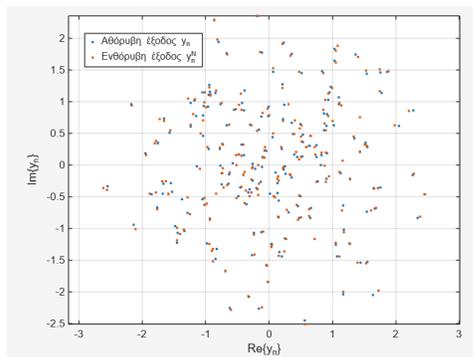
Από τον κώδικα, λάβαμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\text{SNR\_dB} = 30.4652$$

Σε αυτό το ερώτημα, προστέθηκε λευκός κυκλικός Gaussian θόρυβος στην αθόρυβη έξοδο του καναλιού, έτσι ώστε να έχουμε SNR = 30 dB. Όπως γράφτηκε και στον κώδικα, η ισχύς του θορύβου είναι  $P_w = \frac{P_y}{SNR_{linear}}$ , όπου  $P_y$ , η μέση ισχύς της εξόδου και  $SNR_{linear} = 10^{\frac{SNR_{dB}}{10}}$ . Η εκτίμηση του SNR από τα δείγματα, έδωσε την τιμή 30.4652, μια τιμή αρκετά κοντά στα 30 dB.

- A.7 Να σχεδιάσετε τις ακολουθίες  $y_n$  και  $y_n^N$  στο μιγαδικό επίπεδο (οριζόντιος άξονας το πραγματικό μέρος και κατακόρυφος άξονας το φανταστικό μέρος). Τι παρατηρείται;

Ο κώδικας επιστρέφει το ακόλουθο αποτέλεσμα:



Στη γραφική, φαίνονται τα δείγματα της αθόρυβης εξόδου (μπλε) και της ενθόρυβης εξόδου (πορτοκαλί), στο μιγαδικό επίπεδο. Τα σημεία της αθόρυβης

εξόδου σχηματίζουν ένα νέφος.

Η προσθήκη λευκού κυκλικού Gaussian θορύβου για SNR = 30dB προκαλεί τη διασπορά των πορτοκαλί σημείων, χωρίς να υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά από την διασπορά των μπλε σημείων.

B. (20) Στη συνέχεια, θα εκτιμήσουμε το κανάλι, υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε την τάξη του,  $K$ .

B.1 (10) Να χρησιμοποιήσετε την εντολή **toeplitz** και να κατασκευάσετε τον κατάλληλο πίνακα για την εκτίμηση του καναλιού.

Μετά την εκτέλεση του κώδικα, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

Μέγεθος πίνακα A: 204 x 5

Με χρήση της εντολής **toeplitz**, ο πίνακας συνέλιξης του A, ακολουθεί την εξίσωση  $y = Ah$ . Ο πίνακας έχει διαστάσεις  $(N+K) \times (K+1)$ , δηλαδή  $204 \times 5$ , όπως φαίνεται από τον κώδικα.

B.2 Να κατασκευάσετε το κατάλληλο διάνυσμα  $[y_{n_1+K}^N \dots y_{n_2}^N]^T$  για την εκτίμηση του καναλιού.

Από την εκτέλεση του κώδικα προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Μήκος  $y_{N\_tr}$ :  $M = 17$

Σε αυτό το ερώτημα, κατασκευάζουμε το κατάλληλο διάνυσμα  $[y_{n_1+K}^N \dots y_{n_2}^N]^T$ . Για  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 60$  και τάξη καναλιού  $K = 4$ , οι δείκτες κυμαίνονται από  $n = 40 + 4 = 44$ , έως  $n = 60$ , άρα το διάνυσμα έχει μήκος  $M = N_{tr} - K = 17$ .

B.3 Να υπολογίσετε την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του καναλιού.

Ο κώδικας επέστρεψε τα εξής αποτελέσματα:

Εκτιμημένο κανάλι:

-0.4050 + 0.0515i

0.0974 + 0.5873i

-0.2122 + 0.3064i

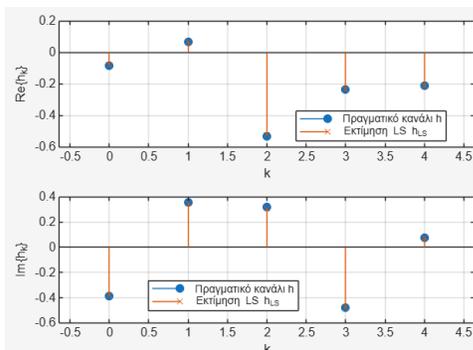
0.5067 - 0.0125i

-0.2624 + 0.1491i

Εδώ, εκτιμήθηκε η κρουστική απόκριση του καναλιού μέσω των ελαχίστων τετραγώνων. Ο κώδικας μας έδωσε το εκτιμημένο διάνυσμα καναλιού, που είναι η κρουστική απόκριση του διακριτού καναλιού. Κάθε στοιχείο αντιστοιχεί στη μιγαδική ενίσχυση της κάθε καθυστερημένης συνιστώσας του σήματος.

B.4 Να σχεδιάσετε σε κοινό plot το πραγματικό κανάλι και την εκτίμηση του (πραγματικό και φανταστικό μέρος). Τι παρατηρείται;

Η εκτέλεση του κώδικα, έδωσε το εξής αποτέλεσμα:



Σε αυτό το ερώτημα φαίνονται το πραγματικό κανάλι και η εκτίμηση, για το φανταστικό και το πραγματικό μέρος. Παρατηρείται ότι για κάθε δείκτη  $k$  η τιμή εκτίμησης είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή. Οι μικρές αποκλίσεις οφείλονται κυρίως στον θόρυβο και το πεπερασμένο πλήθος δειγμάτων.

C. (30) Στη συνέχεια, θα ισοσταθμίσουμε το κανάλι.

C.1 (10) Να υπολογίσετε τον ισοσταθμιστή zero-forcing  $\{f_k^{ZF}\}_{k=0}^{4K}$  για καθυστέρηση  $\Delta$  (ενδεικτικά,  $\Delta = K$ ).

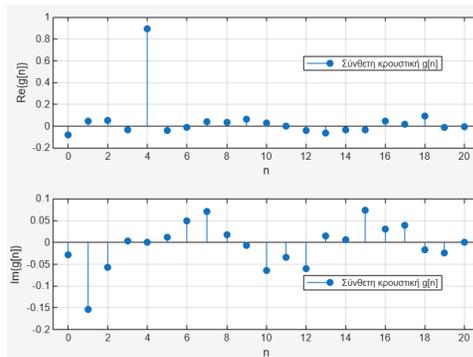
Η εφαρμογή του κώδικα δίνει το εξής αποτέλεσμα:

**Μήκος ισοσταθμιστή: 17**

Σε αυτό το ερώτημα, υπολογίστηκε ο ισοσταθμιστής zero-forcing πεπερασμένου μήκους ( $L_f = 4K + 1$ ). Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Ο ισοσταθμιστής επιλέγεται έτσι ώστε, όταν συνδυαστεί με μια καθυστερημένη μοναδιαία κρουστική  $\delta[n-\Delta]$ , με καθυστέρηση  $\Delta = K$ . Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται η intersymbol interference γύρω από το  $n = \Delta$ .

C.2 (10) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την σύνθετη κρουστική απόκριση (κανάλι-ισοσταθμιστής zero-forcing) (πραγματικό και φανταστικό μέρος). Τι παρατηρείτε;

Ο κώδικας μας έδωσε το εξής αποτέλεσμα:



Σε αυτό το ερώτημα, σχεδιάστηκε η σύνθετη κρουστική απόκριση του συστήματος. Παρατηρείται, ότι στο πραγματικό μέρος της  $g[n]$  υπάρχει μια μεγάλη κορυφή στο  $n = \Delta = K = 4$  ενώ στα υπόλοιπα δείγματα οι κορυφές είναι σημαντικά μικρότερες. Στο φαντασικό μέρος, οι κορυφές είναι σχετικά μικρές για όλο το εύρος. Μοιάζει δηλαδή με μια καθυστερημένη μοναδιαία κρουστική απόκριση, άρα ο ισοσταθμιστής καταφέρνει την δουλειά του και μειώνει το intersymbol interference.

C.3 Να περάσετε την ενθόρυβη έξοδο του καναλιού  $y_n$  από τον ισοσταθμιστή.

Εφαρμόζεται ο κώδικας και δίνεται το εξής αποτέλεσμα:

$$\text{Μήκος } r\_ZF = 204$$

Εδώ, η ενθόρυβη έξοδος του καναλιού  $y_n^N$  μπαίνει από τον ισοσταθμιστή zero-forcing, με αποτέλεσμα την ισοσταθμισμένη ακολουθία  $r_n$ . Είναι δηλαδή συνέλιξη του φίλτρου ισοστάθμισης με την έξοδο του καναλιού.

C.4 (10) Να αποκόψετε κατάλληλα την έξοδο του ισοσταθμιστή, λαμβάνοντας μια εκτίμηση για την είσοδο του καναλιού  $\{\hat{s}_n\}_{n=1}^N$ .

Μετά την εκτέλεση του κώδικα, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

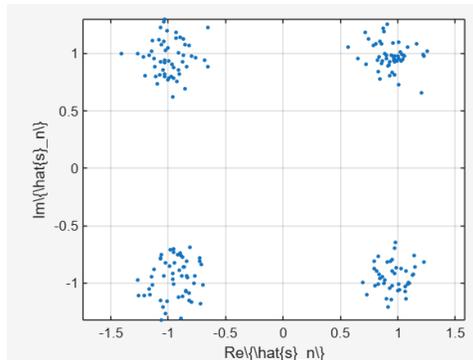
$$\text{Μήκος } s\_hat = 200$$

Σε αυτό το ερώτημα, αποκόβουμε την έξοδο του ισοσταθμιστή zero-forcing και λαμβάνουμε την εκτίμηση της εισόδου του καναλιού  $\{\hat{s}_n\}_{n=1}^N$ . Επιλέγουμε, δηλαδή δείγματα της ισοσταθμισμένης ακολουθίας γύρω από την  $\Delta = K$  (από  $n = \Delta + 1$  μέχρι  $n = \Delta + N$ ) και παίρνουμε ένα διάνυσμα μήκους  $N$ .

C.5 Να σχεδιάσετε την (αποκομμένη) έξοδο του ισοσταθμιστή στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι παρατηρείτε;

Το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον κώδικα είναι τα εξής:

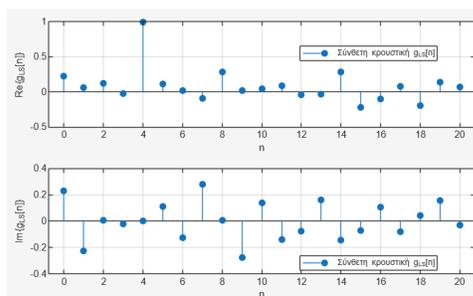


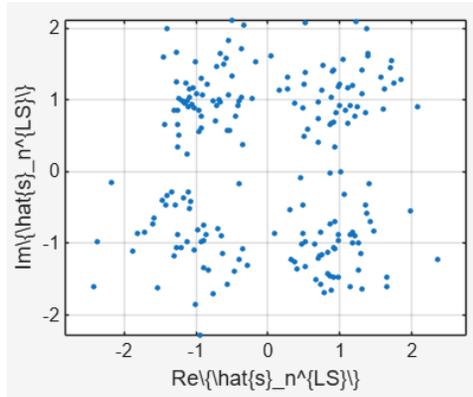
Εδώ, φαίνεται η αποκομμένη έξοδος του ισοσταθμιστή στο μιγαδικό επίπεδο. Παρατηρείται η δημιουργία 4 νεφών γύρω από τις θέσεις  $\pm 1 \pm j$ . Η διασπορά των νεφών δεν είναι πολύ μεγάλη και οφείλεται κυρίως στον θόρυβο. Επομένως ο ισοσταθμιστής zero-forcing επιτρέπει τη σωστή λήψη των συμβόλων.

C.6 (10) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για τον ισοσταθμιστή στο μιγαδικό επίπεδο  $\{f_k^{LS}\}_{k=0}^{4K}$

Από τον κώδικα, πήραμε τα εξής αποτελέσματα:

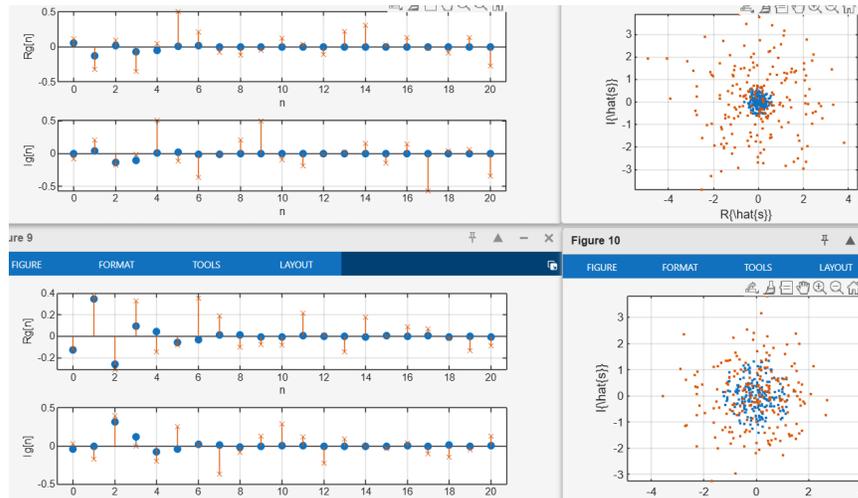
Μήκος  $s_{\text{hat}} = 200$   
Μήκος  $f_{\text{LS}} = 17$   
Μήκος  $r_{\text{LS}} = 204$   
Μήκος  $s_{\text{hat\_LS}} = 200$

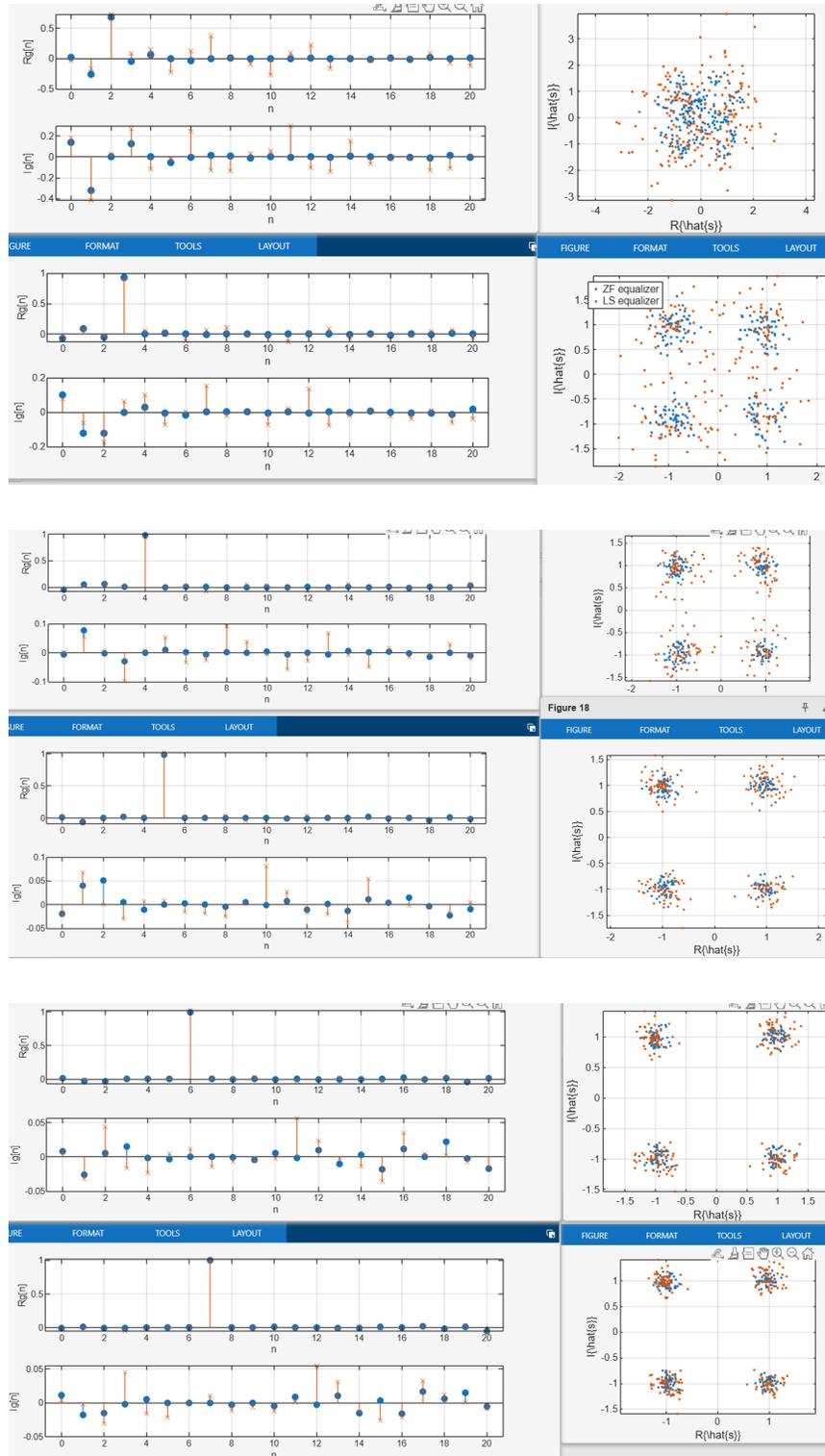


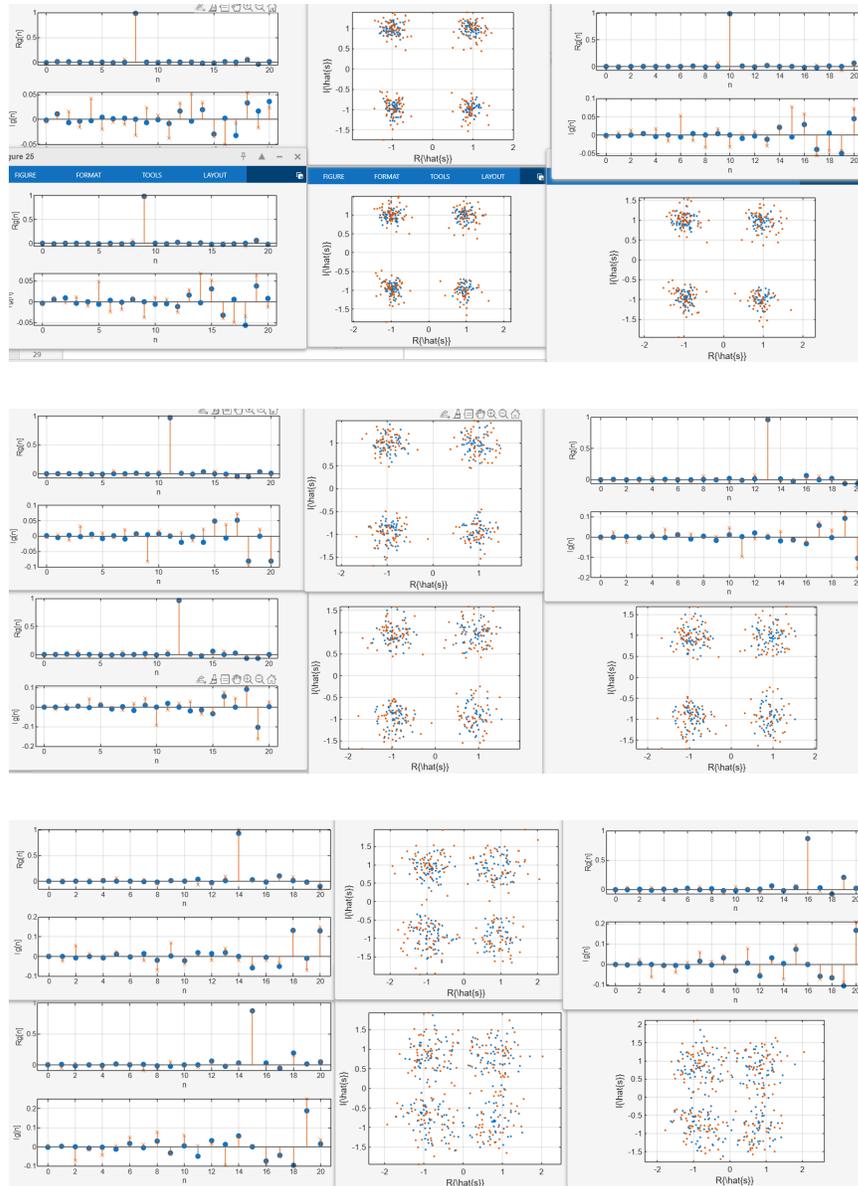


Σε αυτό το ερώτημα, σχεδιάστηκε ισοσταθμιστής ελαχίστων τετραγώνων με μήκος  $4K+1$ . Η σύνθετη κρουστική απόκριση έχει μια κύρια κορυφή στη θέση  $n=\Delta=K$ , αλλά με μεγαλύτερες κρουστικές σε σχέση με τον ισοσταθμιστή zero-forcing. Για το διάγραμμα διασποράς της αποκομμένης εξόδου του LS ισοσταθμιστή φαίνεται (όχι όμως πολύ καθαρά - η φωτογραφία που μπήκε στην αναφορά, ήταν η καλύτερη, τις περισσότερες φορές δεν ήταν ξεκάθαρα τα 4 σημεία) ότι τα σημεία ομαδοποιούνται γύρω από τις θέσεις  $\pm 1 \pm j$ , φαίνεται όμως ότι η διασπορά είναι μεγαλύτερη.

C.7 (10) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για  $\Delta = 0, \dots, 4K$ . Τι παρατηρείτε;







Σε αυτό το ερώτημα εφαρμόστηκαν τα παραπάνω βήματα για καθυστερήσεις  $\Delta=0, \dots, 4K$ .

Παρατηρείται ότι για  $\Delta \approx K$ , υπάρχει μια κυρίαρχη κορυφή και οι υπόλοιπες είναι πολύ μικρότερες και στα διαγράμματα διασποράς, φαίνονται καθαρά τα 4 νέφη γύρω από τις θέσεις  $(\pm 1 \pm j)$ . Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, για πολύ μικρό και πολύ μεγάλο  $\Delta$ , δεν υπάρχει μια κυρίαρχη κορυφή αλλά πολλά δείγματα έχουν μεγαλύτερες κορυφές και στα διαγράμματα διασποράς, δεν φαίνονται ξεκάθαρα τα 4 σημεία.

D. (30) Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την απόδοση της εκτίμησης/ισοστάθμισης καναλιού.

D.1 Να δημιουργήσετε τυχαίο κανάλι  $\{h_k\}$  και να το κανονικοποιήσετε ώστε να έχει ενέργεια ίση με 1, και ακολουθία εκπαίδευσης  $\{s_n\}_{n=n_1}^{n_2}$ .

Ενέργεια πριν την κανονικοποίηση: 3.4607  
 Ενέργεια μετά την κανονικοποίηση: 1

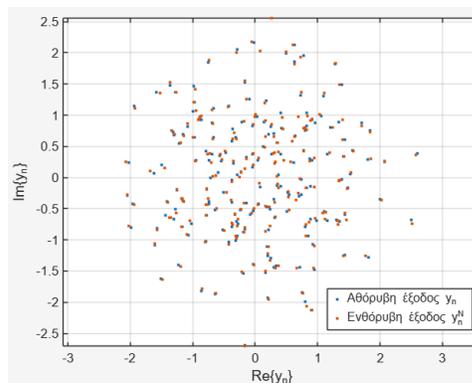
Εδώ δημιουργήθηκε ένα τυχαίο μιγαδικό κανάλι  $\{h_k\}_{k=0}^K$  και το κανονικοποιήσαμε, ώστε η συνολική ενέργεια να είναι ίση με 1. Επίσης, παράγεται ακολουθία QPSK συμβόλων μήκους N για ακολουθία εκπαίδευσης από  $n_1$  έως  $n_2$ .

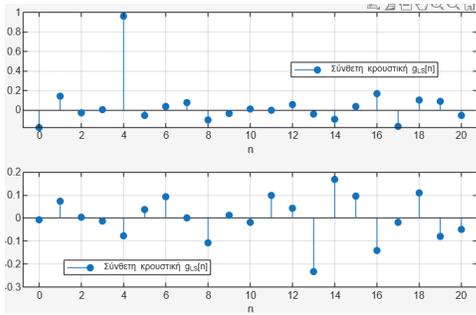
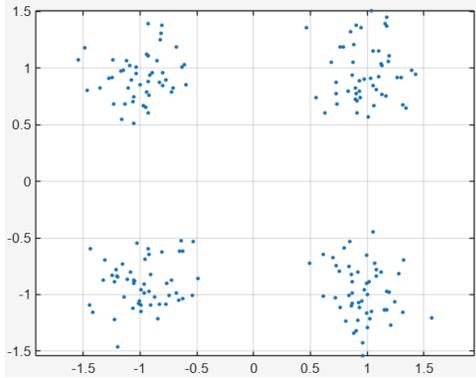
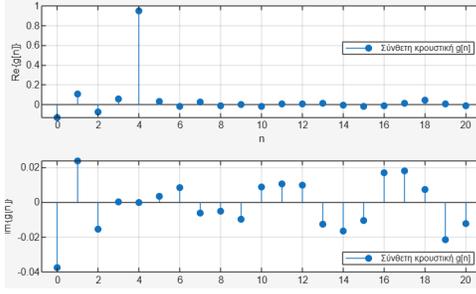
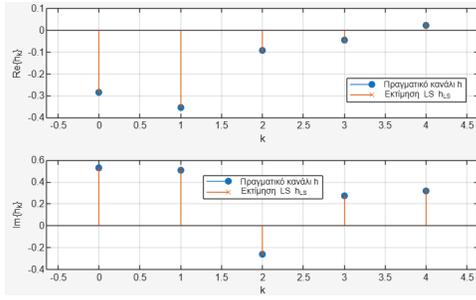
D.2 Για SNR = [2:2:30], να εκτιμήσετε την πιθανότητα σφάλματος bit ως εξής:

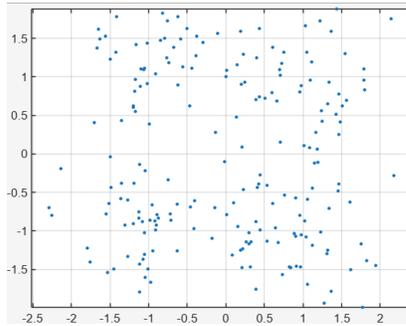
- να δημιουργήσετε M πακέτα δεδομένων  $\{s_n\}$  (με τα σύμβολα εκπαίδευσης στις κατάλληλες θέσεις)
- για κάθε πακέτο, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ενθόρυβη έξοδο
- για κάθε πακέτο, να εκτιμήσετε το κανάλι και τους 2 ισοσταθμιστές, για καθυστέρηση  $\Delta=K$
- (10) να ισοσταθμίσετε την ενθόρυβη έξοδο του καναλιού, και να εντοπίσετε τα σφάλματ εκτίμησης της εισόδου.

Ο κώδικας, μας έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

```
SNR = 2 dB: BER_ZF = 0.2557, BER_LS = 0.3506
SNR = 4 dB: BER_ZF = 0.1896, BER_LS = 0.3057
SNR = 6 dB: BER_ZF = 0.1433, BER_LS = 0.2742
SNR = 8 dB: BER_ZF = 0.09701, BER_LS = 0.233
SNR = 10 dB: BER_ZF = 0.06135, BER_LS = 0.2108
SNR = 12 dB: BER_ZF = 0.03489, BER_LS = 0.1817
SNR = 14 dB: BER_ZF = 0.01972, BER_LS = 0.1532
SNR = 16 dB: BER_ZF = 0.01272, BER_LS = 0.1415
SNR = 18 dB: BER_ZF = 0.007877, BER_LS = 0.1297
SNR = 20 dB: BER_ZF = 0.005698, BER_LS = 0.1137
SNR = 22 dB: BER_ZF = 0.00412, BER_LS = 0.1136
SNR = 24 dB: BER_ZF = 0.002765, BER_LS = 0.1124
SNR = 26 dB: BER_ZF = 0.002584, BER_LS = 0.114
SNR = 28 dB: BER_ZF = 0.002472, BER_LS = 0.1055
SNR = 30 dB: BER_ZF = 0.002011, BER_LS = 0.1136
```



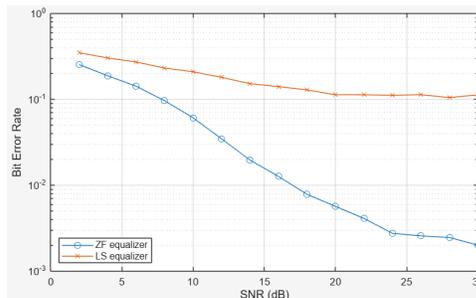




Σε αυτό το ερώτημα, εκτιμήθηκε η πιθανότητα σφάλματος bit ως συνάρτηση του SNR. Για κάθε τιμή του  $\text{SNR} \in [0,30]$  dB, δημιουργήθηκαν  $M$  ανεξάρτητα πακέτα συμβόλων, προστέθηκε λευκός κυκλικός Gaussian θόρυβος στην έξοδο του καναλιού, εκτιμήθηκε το κανάλι και σχεδιάστηκαν 2 ισοσταθμιστές, από τους οποίους προέκυψαν οι εκτιμήσεις των συμβόλων εισόδου και ο αντίστοιχος BER.

D.3 (10) Να σχεδιάσετε την πιθανότητα σφάλματος bit σαν συνάρτηση του SNR.

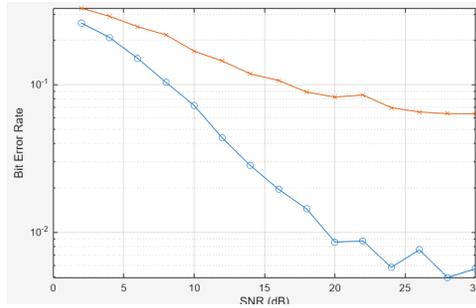
Ο κώδικας έδωσε το εξής αποτέλεσμα:



Σε αυτό το ερώτημα, σχεδιάστηκε το BER ως συνάρτηση του SNR. Από το διάγραμμα BER-SNR φαίνεται ότι ο ισοσταθμιστής ZF "πέφτει" πολύ γρήγορα. Όσο το SNR αυξάνεται, ο ρυθμός σφαλμάτων μειώνεται σχεδόν εκθετικά και άρα το κανάλι βελτιώνεται. Από την άλλη, ο ισοσταθμιστής LS έχει πιο αργή βελτίωση.

D.4 (10) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα αλλά τώρα σε κάθε υλοποίηση του πειράματος να δημιουργείτε τυχαίο κανάλι,  $h \sim CM(0_{K+1}, \frac{1}{K+1} I_{K+1})$ . Τι παρατηρείτε σχετικά με την πιθανότητα σφάλματος bit;

Ο κώδικας, μας έδωσε τα εξής αποτελέσματα:



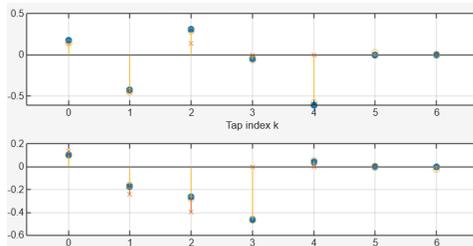
SNR = 2 dB:	BER_ZF = 0.2616,	BER_LS = 0.3297
SNR = 4 dB:	BER_ZF = 0.2087,	BER_LS = 0.2903
SNR = 6 dB:	BER_ZF = 0.1508,	BER_LS = 0.2469
SNR = 8 dB:	BER_ZF = 0.1038,	BER_LS = 0.2172
SNR = 10 dB:	BER_ZF = 0.07242,	BER_LS = 0.1688
SNR = 12 dB:	BER_ZF = 0.04363,	BER_LS = 0.1447
SNR = 14 dB:	BER_ZF = 0.02837,	BER_LS = 0.1185
SNR = 16 dB:	BER_ZF = 0.01959,	BER_LS = 0.1068
SNR = 18 dB:	BER_ZF = 0.01443,	BER_LS = 0.08916
SNR = 20 dB:	BER_ZF = 0.008617,	BER_LS = 0.08249
SNR = 22 dB:	BER_ZF = 0.008757,	BER_LS = 0.0852
SNR = 24 dB:	BER_ZF = 0.00581,	BER_LS = 0.06992
SNR = 26 dB:	BER_ZF = 0.007626,	BER_LS = 0.06538
SNR = 28 dB:	BER_ZF = 0.004958,	BER_LS = 0.06366
SNR = 30 dB:	BER_ZF = 0.005684,	BER_LS = 0.06344

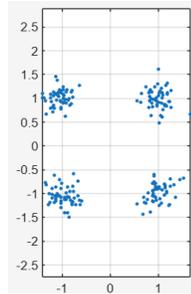
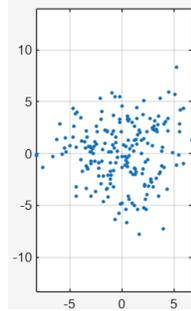
Σε αυτό το ερώτημα, το κανάλι μεταβάλλεται τυχαία σε κάθε υλοποίηση σύμφωνα με  $h \sim CN(0, \frac{1}{K+1} I_{K+1})$ . Παρατηρείται ότι ο zero forcing ισοσταθμιστής βελτιώνεται όσο αυξάνεται το SNR, αλλά, όχι τόσο, όσο στην περίπτωση του σταθερού καναλιού. Αντίθετα ο Least Squares ισοσταθμιστής, εμφανίζει σφάλμα περίπου στο 6% και δεν βελτιώνεται σημαντικά με το SNR, δηλαδή έχει χειρότερη απόδοση από τον zero forcing.

E. (Bonus 30) Μια εξαιρετικά σημαντική επέκταση της άσκησης είναι η εξής.

E.1 (30) Εκτιμήστε και ισοσταθμίστε το κανάλι υποθέτοντας τάξη καναλιού  $\hat{K} < K$  και  $\hat{K} > K$ . Τι παρατηρείτε;

Από τον κώδικα, παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:





Θεωρητικά, αναμένουμε ότι για μεγαλύτερη τάξη ( $\hat{K} > K$ ) θα προστίθενται συντελεστές τα οποία θα είναι 0 και η ισοστάθμιση δεν θα έχει πρόβλημα.

Αντιθέτως για μικρότερη τάξη, έχουμε λιγότερους συντελεστές και η ισοστάθμιση εμφανίζει προβλήματα.

Πράγματι, από τα 2 τελευταία γραφήματα, είναι φανερό ότι για  $\hat{K} < K$  τα σημεία σχηματίζουν ένα νέφος και δεν φαίνονται καθαρά τα 4 σημεία.

Για  $\hat{K} > K$  φαίνονται καθαρά τα 4 σημεία και άρα η ισοστάθμιση είναι σωστή.

Για το γράφημα με τους συντελεστές των καναλιών, φαίνεται ότι τα μπλε είναι το πραγματικό κανάλι, τα πορτοκαλί σημεία με το x αντιστοιχούν σε  $\hat{K} < K$ , ενώ τα πορτοκαλί με τον κύκλο σε  $\hat{K} > K$ . Και εδώ επαληθεύεται η θεωρία, γιατί για  $\hat{K} < K$  σε κάποιους συντελεστές είναι οκ και σε άλλους δεν είναι τους ακολουθά σωστά, ενώ για  $\hat{K} > K$  είναι καλύτερα.