



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

Συμπεριφορά Rayleigh flat fading καναλιων με εισοδο 4-QAM - Άσκηση 1

Οικονομίδης Κωνσταντίνος (ΑΜ:2021030075)
Διδάσκων: Αθανασιος Π. Λιάβας

Πολυτεχνείο Κρήτης - Σχολή ΗΜΜΥ
Ασύρματες Επικοινωνίες

Χειμερινό εξάμηνο 2025-2026

Ερώτημα 1: Να δημιουργήσετε χρονικά μεταβαλλόμενο flat fading μιγαδικό κανάλι χρησιμοποιώντας το AR-1 μοντέλο (Αν $b \approx 1$, τότε η $h[k]$ "αργεί" να γίνει στάσιμη, οπότε N πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο, π.χ. $N=1000$ και αγνοούνται τα πρώτα $\frac{1}{1-b}$ δείγματα του $h[k]$):

$$h[k] = bh[k-1] + e[k], \quad k = 2, \dots, N$$

με $h[1] = 1$, $0 < b < 1$, $R_h[0] := E|h[k]|^2 = 1$, $e[k]$ i.i.d. με κατανομή $CN(0, \sigma_e^2)$. Να σχεδιάσετε υλοποιήσεις (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για $b \approx 1$ και $0 < b \ll 1$. Τι παρατηρείτε, σχετικά με την ταχύτητα μεταβολής των τιμών του καναλιού;

Απάντηση:

Από το AR-1 μοντέλο $h[k] = b \cdot h[k-1] + e[k]$, παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου του μέτρου και χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία του $e[k]$ από το $h[k-1]$:

$$\begin{aligned} E\{|h[k]|^2\} &= E\{|b \cdot h[k-1] + e[k]|^2\} = \\ &= b^2 \cdot E\{|h[k-1]|^2\} + E\{|e[k]|^2\} = b^2 \cdot E|h[k-1]|^2 + \sigma_e^2 \end{aligned}$$

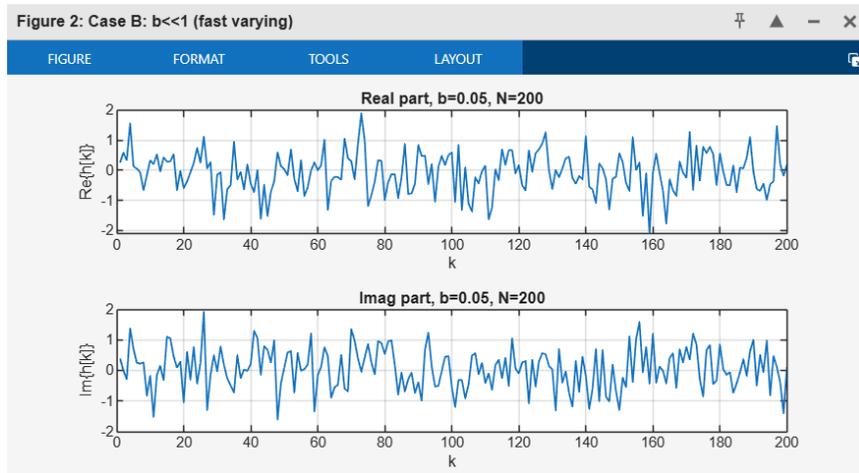
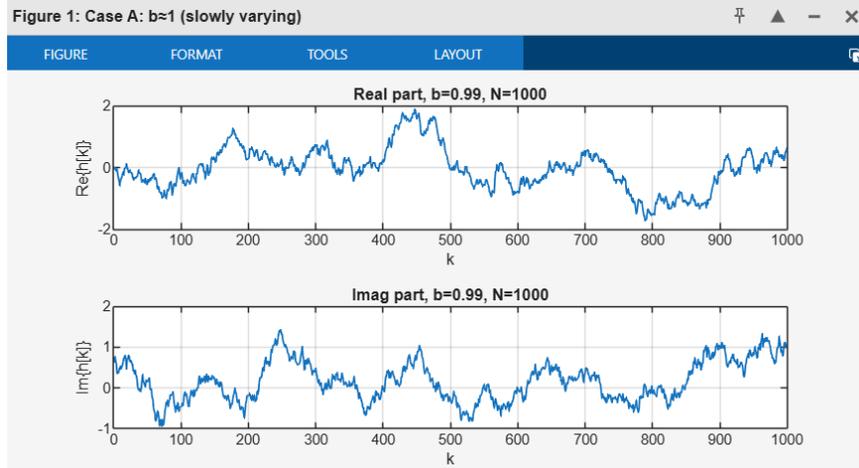
Για στάσιμη κατάσταση, έχουμε $E|h[k]|^2 = E|h[k-1]|^2 = R_b[0] = 1$

Επομένως: $1 = b^2 \cdot 1 + \sigma_e^2 \Rightarrow \sigma_e^2 = 1 - b^2$

Αριθμητική επαλήθευση:

- Για $b = 0.99$: $\sigma_e^2 = 1 - 0.99^2 = 0.0199$
- Για $b = 0.05$: $\sigma_e^2 = 1 - 0.05^2 = 0.9975$

Από τον κώδικα, λάβαμε τα εξής αποτελέσματα:



Case A: $b=0.99$, burn-in $M=100$, $\sigma_e^2=0.0199$, empirical $E\{|h|^2\}=0.733$
Case B: $b=0.05$, burn-in $M=2$, $\sigma_e^2=0.9975$, empirical $E\{|h|^2\}=0.924$

Από τις 2 γραφικές, παρατηρείται ότι:

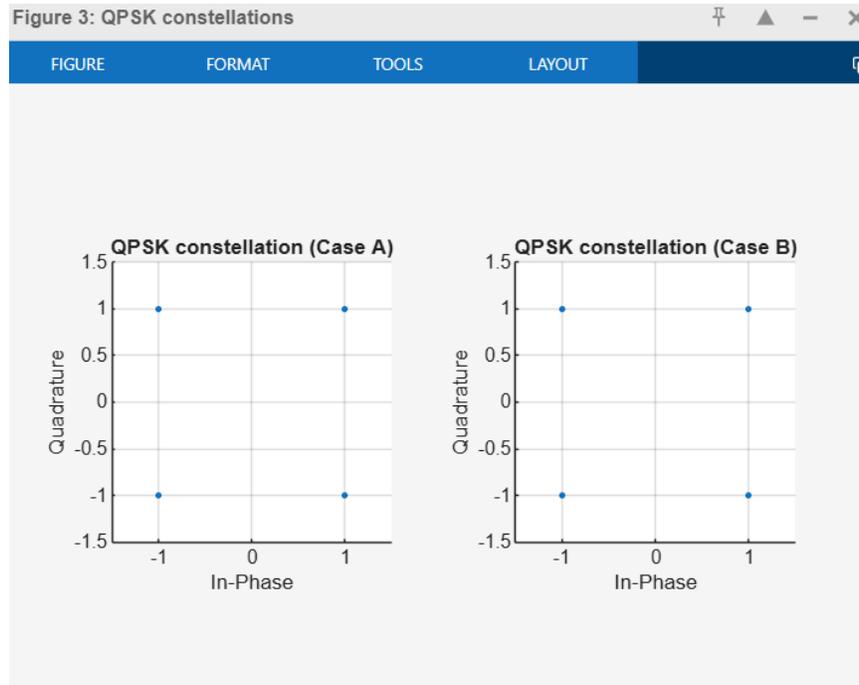
- Για $b \approx 1$: Το κανάλι είναι **αργά μεταβαλλόμενο**, τα διαδοχικά δείγματα είναι συσχετισμένα και οι συνιστώσες του φανταστικού και πραγματικού μέρους, αλλάζουν ομαλά στον χρόνο
- Για $0 < b \ll 1$: Το κανάλι είναι **γρήγορα μεταβαλλόμενο** και τα διαδοχικά δείγματα είναι σχεδόν ασυσχέτιστα

Και για τις δυο περιπτώσεις, η μέση ισχύς είναι ίδια και ίση με $E|h|^2 \approx 1$

Ερώτημα 2: Να δημιουργησετε 4-QAM είσοδο $s[k]$, $k=1, \dots, N$, με τιμές $\pm 1 \pm j$, ισοπίθανες.

Απάντηση:

Μέσω του κώδικα, η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι η εξής:



Το σύνολο των συμβόλων είναι $S = \pm 1 \pm j$. Παράγονται $s[k] = (2b_I[k] - 1) + j(2b_Q[k] - 1)$ με $b_I, b_Q \in 0,1$ ισοπίθανα, δηλαδή κάθε σημείο έχει πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Θεωρητικά, $E|s|^2 = 2$. Άρα $E_s = 2$ και $E_b = \frac{E_s}{2} = 1$. Ο αστερισμός έχει 4 σημεία με ισοκατανομή.

Ερώτημα 3: Να υπολογίσετε την έξοδο του καναλιού

$$r[k] = h[k]s[k] + n[k], \quad k = 1, \dots, N$$

όπου $n[k]$ λευκός Gaussian θόρυβος. Το μέσο λαμβανόμενο SNR ορίζεται ως εξής:

$$SNR_{db} = 10 \log_{10} \frac{E\{|h[k]s[k]|^2\}}{E\{|n[k]|^2\}}$$

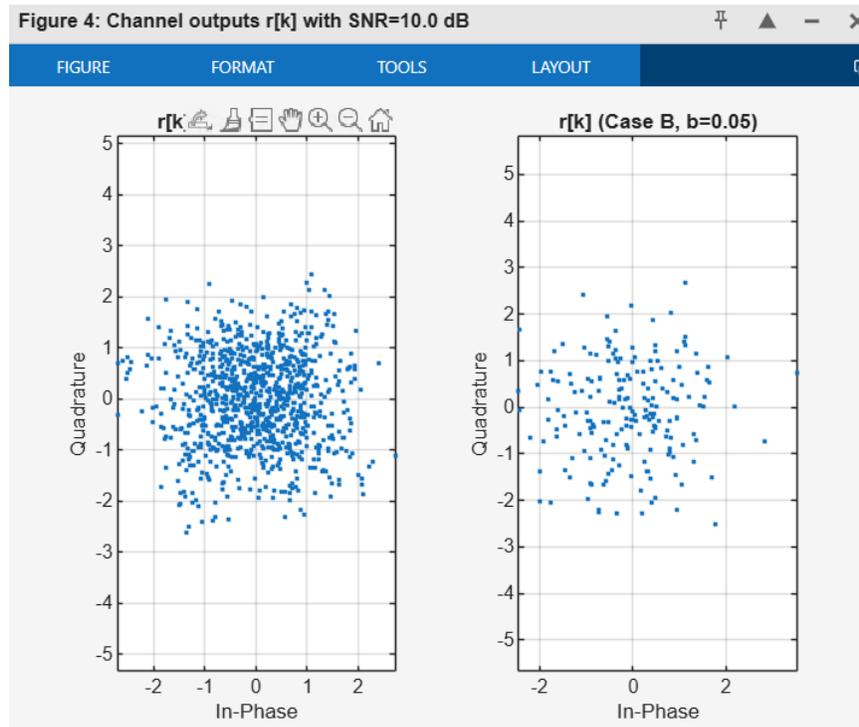
Απάντηση:

Το μοντέλο είναι το εξής: $r[k] = h[k]s[k] + n[k]$, $n[k] \sim \text{CN}(0, \sigma_n^2)$

και το μέσο SNR ορίζεται ως εξής:

$$SNR = \frac{E\{|h[k]s[k]|^2\}}{E\{|n[k]|^2\}}, \quad SNR_{db} = 10\log_{10}(SNR)$$

Επίσης ισχύει: $\{|s|^2 = 2\}$ και με στασιμη κανονικοποίηση $\{|h|^2\} = 1$, άρα $E\{|hs|^2\} = 2$.



Παρατηρείται, ότι τα $r[k]$, πριν την εξίσωση, σχηματίζουν νέφη γύρω από το 0. Κάθε σύμβολο $s[k]$ δέχεται τυχαία κλιμάκωση $|h[k]|$ και περιστροφή $\angle h[k]$, ενώ ο AWGN κάνει τα νέφη πιο παχιά. Δεν φαίνονται ακόμα καθαρά οι 4 θόλοι της QPSK.

Η διαφορά για $b \approx 1$ και $0 < b \ll 1$ έγκειται στο πόσο γρήγορα μετακινούνται και περιστρέφονται τα νέφη, καθώς αλλάζει το $h[k]$ και παρατηρείται επίσης ότι το σχήμα των νεφών δεν αλλάζει.

Ερώτημα 4: Να υποθέσετε ότι στο δέκτη γνωρίζετε τις ακριβείς τιμές του καναλιού $h[k]$, για κάθε k (μη ρεαλιστική αλλά χρήσιμη υπόθεση - αργότερα θα την αναιρέσουμε), και να εκτιμήσετε την είσοδο με χρήση της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας.

Απάντηση:

Θεωρείται το μοντέλο, $r[k] = h[k]s[k] + n[k]$, όπου $n[k] \sim \text{CN}(0, \sigma_n^2)$ και το κανάλι $h[k]$ είναι γνωστό στον δέκτη.

Η υπό συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας είναι: $p(r[k]|s) = \frac{1}{\pi\sigma_n^2} \exp(-\frac{|r[k]-h[k]s|^2}{\sigma_n^2})$
Κανόνας ML:

$$\hat{s}[k] = \underset{s \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmax}} p(r[k]|s) = \underset{s \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmin}} |r[k] - h[k]s|^2.$$

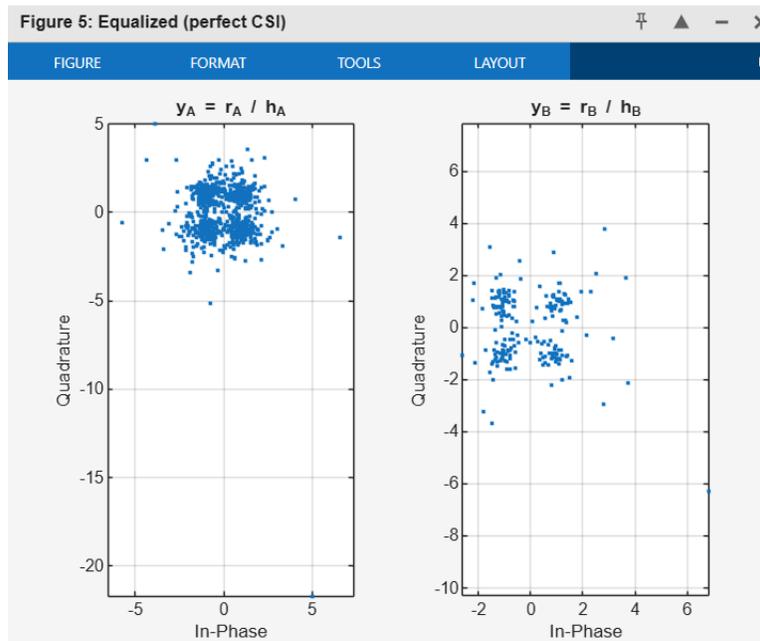
Για $h[k] \neq 0$, ορίζεται: $y[k] = \frac{r[k]}{h[k]}$, τότε για QPSK/4-QAM:

$$\hat{s}[k] = \operatorname{sgn}(R\{y[k]\}) + j\operatorname{sgn}(I\{y[k]\})$$

δηλαδή τα όρια απόφασης είναι οι άξονες $\operatorname{Re}y = 0$ και $\operatorname{Im}y = 0$.

Φυσική ερμηνεία:

Η εξίσωση $y[k] = r[k]/h[k]$ ανακτά το αρχικό σύμβολο με θόρυβο. Διαιρώντας με το $h[k]$, "αναιρούμε" την επίδραση του καναλιού (κλιμάκωση και περιστροφή) και επαναφέρουμε τα σύμβολα κοντά στις αρχικές τους θέσεις $\pm 1 \pm j$. Ο ανιχνευτής ML απλοποιείται σε hard decision (slicer) στους άξονες: αν $\operatorname{Re}y[k] > 0$ τότε $\operatorname{Re}\hat{s}[k] = +1$, αλλιώς -1 (το ίδιο για Im).

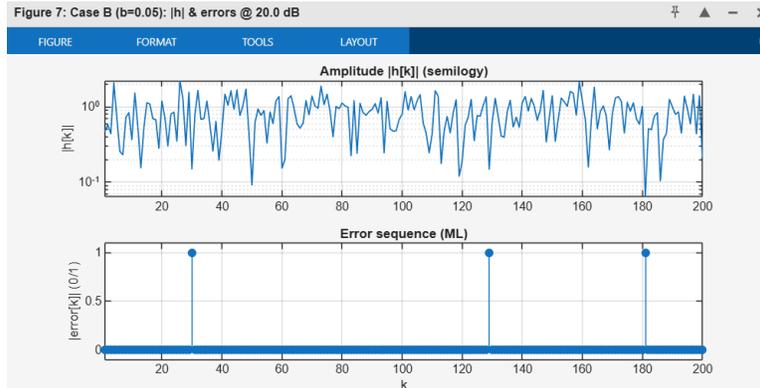
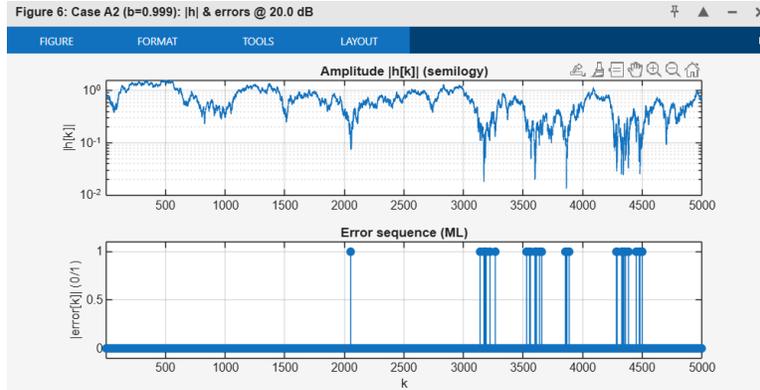


Ερώτημα 5: Να εντοπίσετε τα σφάλματα αποκωδικοποίησης και να τα συσχετίσετε με το πλάτος του καναλιού $|h[k]|$ ως εξής. Να σχεδιάσετε (subplot(211)) το πλάτος του καναλιού σε ημιλογαριθμική κλίμακα (semilogy) και την απόλυτη τιμή των σφαλμάτων (subplot(212)).

Τι παρατηρείται σχετικά με τη θέση των σφαλμάτων σε σχέση με το πλάτος του καναλιού για σχετικά μεγάλα SNR (ενδεικτικά $SNR_{db} > 15$); Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Απάντηση:

Για μεγάλο SNR(π.χ. 20dB) ανιχνεύεται με ML και σχηματίζεται δυαδική ακολουθία σφαλμάτων $e[k] = 1\{\hat{s}[k] \neq s[k]\}$
 Οπότε, σχεδιάζεται $|h[k]|$ σε ημιλογαριθμική κλίμακα και $|e[k]| \in \{0, 1\}$ ως stem.

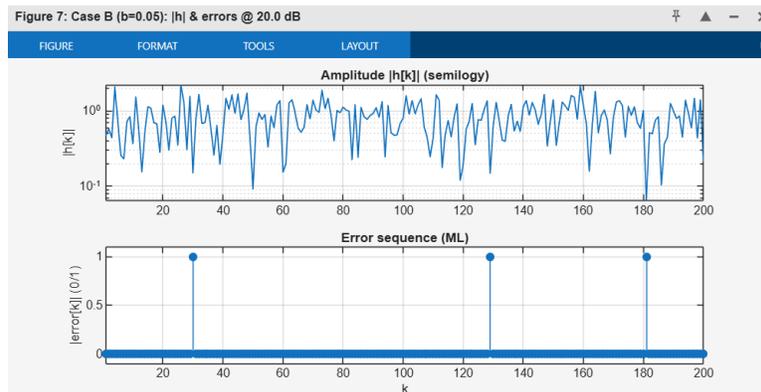
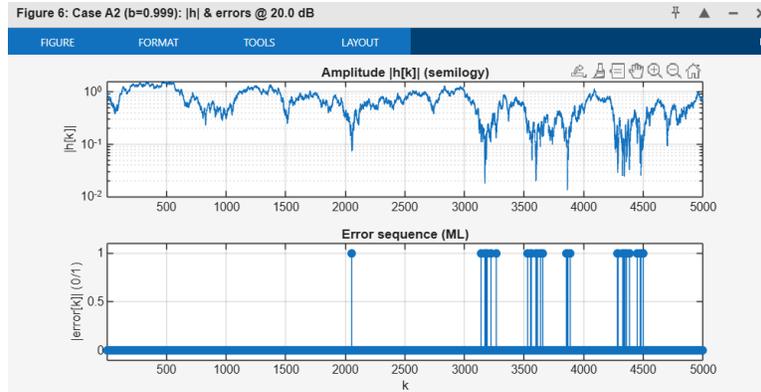


Είναι φανερό ότι τα σφάλματα συμπίπτουν με τις "βουτιές" του $|h[k]|$, δηλαδή για όποιες χρονικές στιγμές το πλάτος του καναλιού πέφτει (deep fade), εμφανίζονται τα λάθη. Εμφανίζονται και λίγα σφάλματα εκτός των fades, λόγω του στατιστικού θορύβου, αλλά είναι σπάνια.

Ερώτημα 6: Τι παρατηρείτε σχετικά με την κατανομή των σφαλμάτων για $b \approx 1$ (έστω $b = .999$) και για $0 < b \ll 1$; Σε ποιά περίπτωση τα λάθη εμφανίζονται "πιο ομαδοποιημένα"; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Απάντηση:

Χρησιμοποιώντας τα ίδια figures με πριν, ισχύει:



- Για $b \approx 1$, τα σφάλματα εμφανίζονται ομαδοποιημένα. Φαίνονται πολλά διαδοχικά stems στο figure των σφαλμάτων όταν το $|h[k]|$ μπαίνει σε deep fade.
- Για $0 < b \ll 1$, τα σφάλματα είναι πιο λίγα και διάσπαρτα στο χρόνο. Τα fades είναι λιγότερα, άρα δεν υπάρχουν διαδοχικά λάθη.

Το AR-1 έχει αυτοσυσχέτιση: $R_h[m] = b^{|m|}$, επομένως:

- Για $b \approx 1$, η χρονική συσχέτιση και ο χρόνος συνοχής είναι μεγάλοι και οι δύο. Αν το $|h[k]|$ μικρύνει, παραμένει μικρό για αρκετά k . Άρα το στιγμιαίο SNR (γ_b) μένει χαμηλό για πολλά σύμβολα, δηλαδή παρατηρούνται burst λαθών.
- Για $0 < b \ll 1$, η μνήμη είναι μικρή, δηλαδή η συσχέτιση διαδοχικών δειγμάτων είναι μικρή. Οπότε ένα στιγμιαίο fade διορθώνεται πολύ γρήγορα και το στιγμιαίο SNR ανακάμπτει άμεσα. Επομένως τα λάθη δεν εμφανίζονται συνεχόμενα.

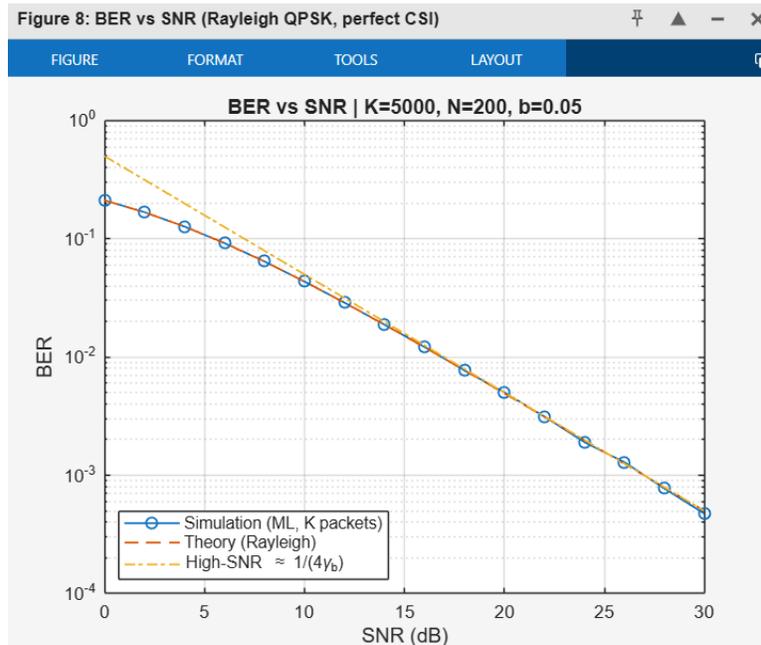
Ερώτημα 7: Να υπολογίσετε το BER για $SNR_{db} = [0:2:30]$ χρησιμοποιώντας K πακέτα με N σύμβολα το καθένα. Να σχεδιάσετε σε κοινό plot τα BERS για το AWGN και το flat fading κανάλι και να τα συγκρίνετε. Τι παρατηρείται;

Απάντηση:

Για $SNR_{dB} \in [0:2:30]$ δημιουργούνται K πακέτα των N . Για κάθε σύμβολο ισχύει:

$$r = hs + n, \quad h \sim CN(0,1)$$
$$n \sim CN(0, \sigma_n^2), \quad \sigma_n^2 = \frac{E_s}{SNR}$$

Επειτα εξισώνεται $y = \frac{r}{h}$ και γίνεται slicing σε I/Q.
Τέλος μετράται το BER και το μέσο-όρο σε όλα τα πακέτα.



Η καμπύλη της προσομοίωσης επικαλύπτεται με την θεωρητική, με μικρές αποκρίσεις σε όλο το εύρος του SNR.

Για υψηλό SNR, η προσομοίωση και η ασυμπτωτική ($\frac{1}{4\gamma_b}$) σχεδόν ταυτίζονται. Για μεσαίο και χαμηλό SNR, η ασυμπτωτική υποεκτιμά το BER, ενώ η θεωρητική ταιριάζει.

Ερώτημα 8: Να υπολογίσετε το BER για AWGN κανάλι και $SNR_{dB} = [0:2:14]$ χρησιμοποιώντας K πακέτα με N σύμβολα το καθένα. Να σχεδιάσετε σε κοινό plot τα BERs για το AWGN και το flat fading κανάλι και να τα συγκρίνετε. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

Για QPSK με Gray mapping ισχύει $E_s = E\{|s|^2\} = 2$ και $\frac{E_s}{2} = 1$

- AWGN:

$$P_b^{AWGN}(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_b}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma_s}{2}}\right)$$

$$\gamma_s = \frac{E_s}{N_0}, \gamma_b = \frac{\gamma_s}{2}$$

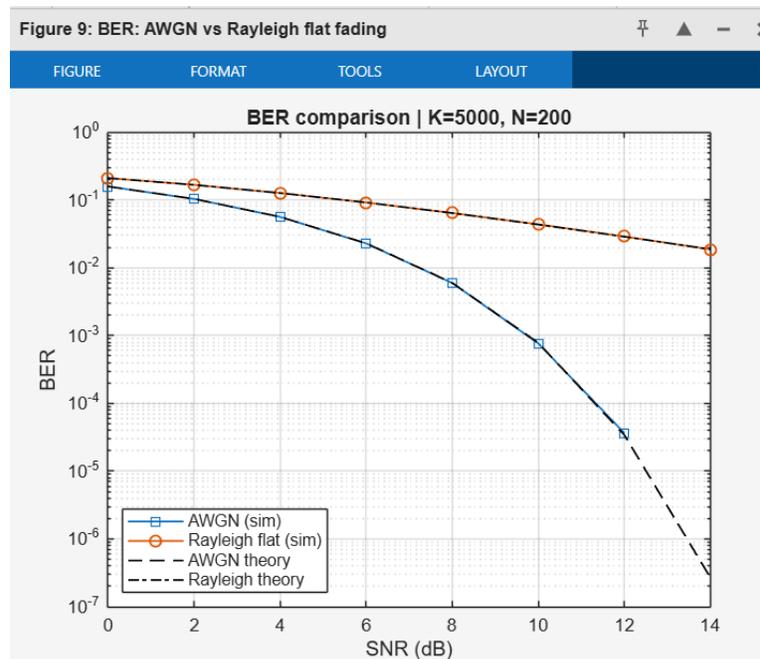
- Rayleigh flat fading:

$$P_b^{Rayleigh}(\gamma_b) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_b}{1 + \gamma_b}}\right)$$

$$SNR : P_b^{Rayleigh} \approx \frac{1}{4\gamma_b}$$

Κατά την προσομοίωση, για $SNR_{dB} \in [0 : 2 : 14]$ δημιουργούνται K πακέτα των N συμβόλων:

- AWGN: $r = s + n, n \sim CN(0, \sigma_n^2), \sigma_n^2 = \frac{E_s}{\gamma_s}$
- Rayleigh: $r = hs + n, h \sim CN(0, 1), y = \frac{r}{h}$ slicing. Υπολογίζεται το BER ανά SNR και μέσος-όρος σε όλα τα πακέτα. Παράλληλα σχεδιάζονται και οι θεωρητικές καμπύλες.



Η προσομοίωση συμφωνεί με τις θεωρητικές καμπύλες και για τα 2 κανάλια με μικρές αποκλίσεις.

Παρατηρείται ότι το **AWGN** πέφτει πολύ πιο απότομα με το SNR, ενώ το **Rayleigh** έχει ουρά $\frac{1}{\gamma_b}$ (για υψηλά SNR οι καμπύλες απομακρύνονται).
 Για την ίδια πιθανότητα σφάλματος, το Rayleigh χρειάζεται περισσότερα dB από το AWGN και όσο αυξάνεται το SNR, τόσο μεγαλώνει το χάσμα.

Ερώτημα 9: Να επαναλάβετε τα βήματα 2-4 για block fading κανάλια. Για κάθε πακέτο δεδομένων, επιλέγετε την τιμή του καναλιού $h \sim CN(0,1)$ η οποία παραμένει σταθερή για όλη τη διάρκεια του πακέτου. Υπολογίστε το BER χρησιμοποιώντας K πακέτα (ενδεικτικά $K = 100000$, $N = 100$) και συγκρίνετε με το BER της χρονικά μεταβαλλόμενης περίπτωσης. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

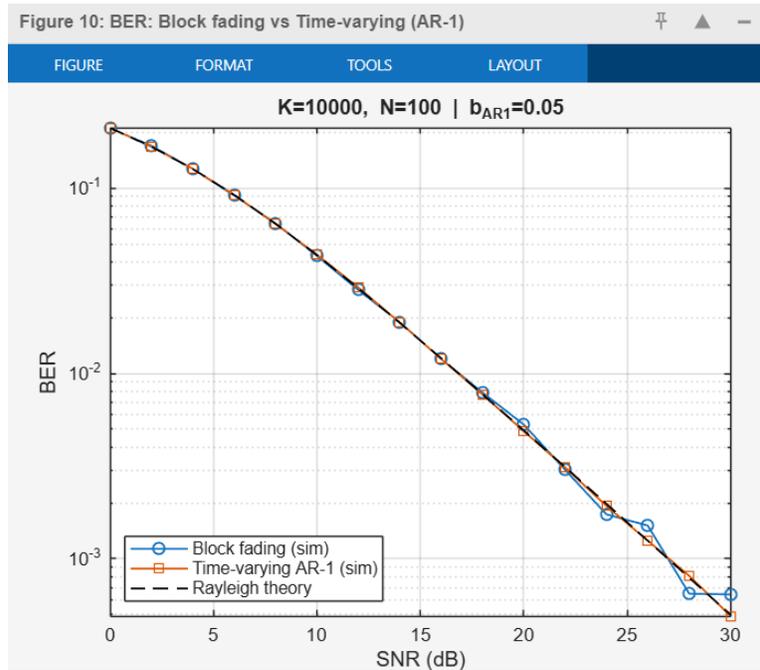
Για κάθε πακέτο μήκους N αντλούμε ένα $h \sim CN(0,1)$ και το κρατάμε σταθερό σε όλα τα N σύμβολα. Με QPSK, $r = hs + n$, $\sigma_n^2 = \frac{E_s}{\gamma_s}$ και perfect CSI.

Θεωρητικό BER: Το μέσο BER είναι το ίδιο με το Rayleigh flat-fading:

$$P_b^{Rayleigh}(\gamma_b) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_b}{1 + \gamma_b}}\right), \quad (QPSK, \text{ συνεκτική ανίχνευση})$$

και για υψηλό SNR: $P_b \simeq \frac{1}{4\gamma_b}$

Κατά την προσομοίωση, για SNR_{dB} στο εύρος που δίνεται από την εκφώνηση, στέλνονται K πακέτα. Ανά πακέτο: i) $h \leftarrow CN(0,1)$ ii) παράγονται s iii) προστίθεται AWGN iv) εξισώνονται/ανιχνεύονται v) μετρώνται λάθη και αθροίζονται σε BER.



Από το figure, παρατηρείται:

- Η καμπύλη block fading επικαλύπτεται σχεδόν όλη με την θεωρητική Rayleigh, ενώ το μέσο BER είναι σχεδόν το ίδιο.
- Υπάρχει διαφορά στη δομή των λαθών: στο block-fading το $|h|$ είναι σταθερό μέσα στο πακέτο, άρα το στιγμιαίο SNR είναι επίσης σταθερό. Αν το πακέτο είναι σε deep fade, τότε εμφανίζονται πολλά λάθη μαζεμένα στο πακέτο. Αν δεν υπάρχει fade, το πακέτο είναι σχεδόν χωρίς λάθη. Έτσι για την κατανομή σφαλμάτων ανά πακέτο, ισχύει, οτι υπάρχουν πολλά καλά πακέτα και λίγα κακά πακέτα.
- Στο χρονικά μεταβαλλόμενο Rayleigh τα fades εναλλάσσονται πιο γρήγορα από σύμβολο σε σύμβολο, άρα τα λάθη είναι λιγότερο ομαδοποιημένα. Το μέσο BER είναι ίδιο, αλλά η διασπορά του αριθμού λαθών ανά πακέτο είναι μικρότερη